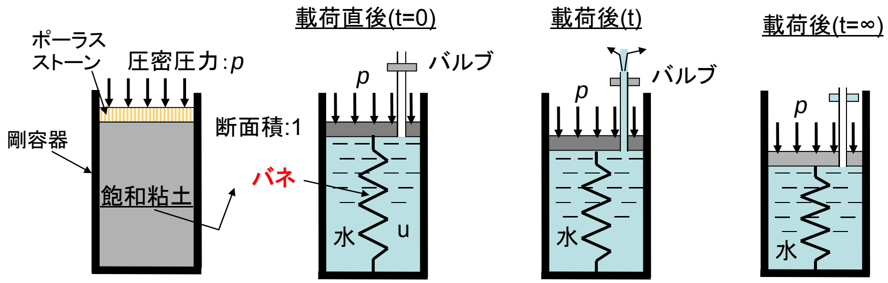
1.3 圧密理論

圧密方程式の誘導と解法

圧密：粘土の圧縮の時間過程 （ピストン－スプリングモデル）

圧縮量：Δl(t)、間隙水圧：u(t)、有効応力：Δp'(t)（Δσ'(t)）



飽和粘土の圧密	バネ長縮み量：$\Delta l = \Delta l_0 = 0$	$\Delta l = \Delta l(t)$	$\Delta l = p/K$
	バネ荷重：$p' = p_0' = 0$	$p' = K\Delta l(t)$	$p' = p$
	過剰水圧：$u = u_0 = p$	$u = p - K\Delta l(t)$	$u = 0$

1.3.1一次元圧密理論の仮定：

基本方程式の誘導

①一次元変形、一次元流れ

②有効応力に従って、弾性論が成り立つ

Fooke則

③Darcy則($v=ki$)が成立

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma'_x - \nu(\sigma'_y + \sigma'_z)\right)$$

④土は均質で飽和

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma'_y - \nu(\sigma'_z + \sigma'_x)\right)$$

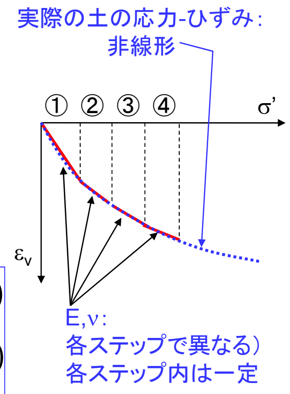
⑤土粒子と水は非圧縮

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma'_z - \nu(\sigma'_x + \sigma'_y)\right)$$

$m_v = \frac{1}{K}, K = \frac{E}{3(1-\nu)}$ （m_v=>水：$4.5\times10^{-4}(\mathrm{MN/m^2})^{-1}$，粘土：1〜$10^{-2}(\mathrm{MN/m^2})^{-1}$）

⑥土質定数(k, m_v)は、ある圧力増分間は一定（Terzaghi：変数u）

（cf：三笠の圧密方程式：$k, m_v \neq const$）



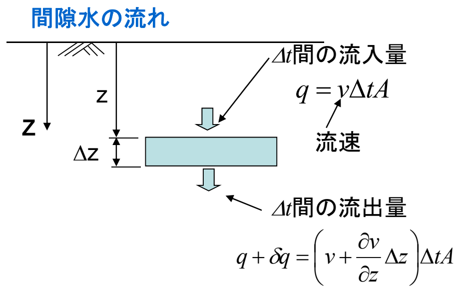
1.3.2一次元圧密方程式の誘導

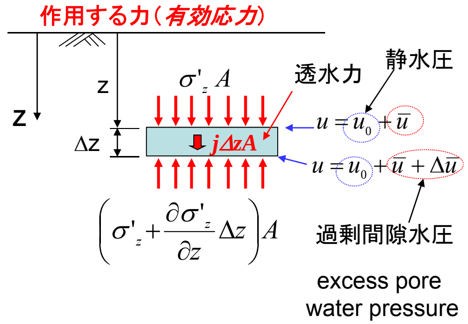
•ひずみに関する圧密方程式（三笠の圧密方程式）

•過剰間隙水圧に関する圧密方程式（Terzaghiの式）

1.3.2一次元圧密方程式

単位断面積A、高さΔzの要素の脱水量と作用力





・Δt間の要素からの脱水量：ΔV_w

$$\Delta V_w = (q + \delta q) - q = \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)\Delta zA\Delta t \qquad (1.6)$$

・要素の鉛直圧縮ひずみ：ε(z,t) = 体積ひずみ （∵仮定①：一次元変形）

Δt間のεの変化： $\left(\partial\varepsilon/\partial t\right)\Delta t$

Δt間の要素の体積変化： $\Delta V = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right)\Delta t \cdot A \cdot \Delta z \qquad (1.7)$

仮定④⑤（均質飽和、土、水は非圧縮）より

$$\Delta V = \Delta V_w \quad \Leftarrow \quad (1.6)=(1.7) \qquad \therefore \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial z} \qquad (1.8)$$

ここで、全head: $h = h_e + u/\gamma_w = \underbrace{h_e + u_s/\gamma_w}_{\text{Const.}} + \bar{u}/\gamma_w$

仮定③(Darcy's law)

Δz間のhの変化: Δh

$$\Delta h = \frac{\Delta \bar u}{\gamma_w} \quad \Rightarrow \quad i = -\frac{\Delta h}{\Delta z} = -\frac{1}{\gamma_w}\frac{\Delta \bar u}{\Delta z} \qquad \therefore v = ki = -\frac{k}{\gamma_w}\frac{\partial \bar u}{\partial z} \qquad (1.9)$$

・要素内の土粒子に作用する力（有効応力）の釣り合い

$i = v/k$

$$\frac{\partial \sigma'_z}{\partial z}\Delta z A = jA\Delta z, \qquad \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} = j = i\gamma_w = \frac{\gamma_w}{k}v \qquad (1.10)$$

ここで $\Delta\varepsilon = m_v \Delta\sigma'_z \quad \Leftarrow \quad$（仮定②＋仮定①）

(1.10) $\rightarrow \quad \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} = \frac{1}{m_v}\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = \frac{\gamma_w}{k}v, \qquad \therefore v = \frac{k}{m_v\gamma_w}\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \qquad (1.11)$

(1.11) => (1.8) $\quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{k}{m_v\gamma_w}\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\right) \qquad (1.12)$

体積ひずみに関する圧密方程式（三笠の圧密方程式）

過剰間隙水圧($\bar u$)に関する圧密方程式:

m_v: const

$$\Delta\varepsilon = m_v\Delta\sigma'_z \Rightarrow (1.12) \quad \Rightarrow \quad m_v\frac{\partial \sigma'_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{k}{\gamma_w}\frac{\partial \sigma'_z}{\partial z}\right) \qquad (1.13)$$

・載荷圧$\Delta\sigma_z$＝constならば

$(\because \Delta\sigma_z = \Delta\sigma'_z + \bar u \Rightarrow \Delta\sigma'_z = \Delta\sigma'_z - \bar u)$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \bar u}{\partial t} = \frac{1}{m_v}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{k}{\gamma_w}\frac{\partial \bar u}{\partial z}\right) \qquad (1.14)$$

γ_w＝const, もし k=const. （仮定⑥<= k, m_v: const)

$$\frac{\partial \bar u}{\partial t} = c_v\frac{\partial^2 \bar u}{\partial z^2} \qquad (1.15)$$

Terzaghiの圧密方程式

$$c_v = \frac{k}{\gamma_w m_v} \qquad (1.15')$$

c_v:圧密係数
Coefficient of consolidation

(1.14)式で、もしk(z),m_v(z)でも $\frac{k(z)}{m_v(z)} = const.$ なら

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \bar c_v\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} \qquad \left(\bar c_v = \frac{k(z)}{\gamma_w m_v(z)}\right)$$

熱伝導型編微分方程式

変数$u(z,t)$

（1.15)と同形、（1.12)は(1.15)を含む、より一般性がある式。

1.3.3 圧密方程式の解法

境界条件、
(Boundary conditions: B.C.)
初期条件
(Initial conditions: I.C)

注:過剰間隙水圧

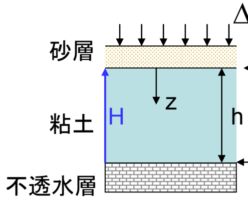
圧密方程式 $\frac{\partial u}{\partial t} = c_v\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \left(c_v = \frac{k}{\gamma_w m_v}\right) \qquad (1.15)$

偏微分方程式

従属変数: $u(z,t)$ or $\varepsilon(z,t)$

- B.C.1（片端排水条件）

$\Delta\sigma_{z0}$:載荷圧



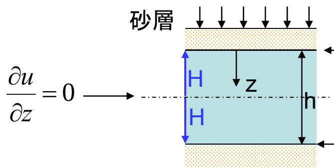
排水面: $u = 0 \quad at \quad z = 0$ (1.16-1)

非排水面: $v = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad at \quad z = h$ (1.16-2)

H:最大排水長 ＝h

2つの境界条件

- B.C.2（両端排水条件）

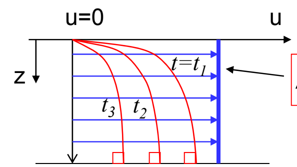


排水面: $u = 0 \quad at \quad z = 0$

排水面: $u = 0 \quad at \quad z = 0$

H:最大排水長
＝h/2

I.C. 初期過剰間隙水圧分布: Δu(z) at t=0



$$\boxed{\Delta u = \Delta\sigma_{z0} \quad at \quad t = 0} \qquad (1.17)$$

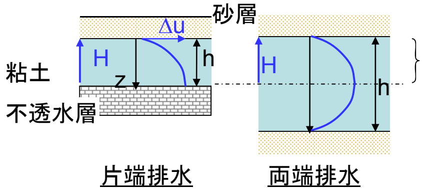
鉛直載荷を短時間で完了:
simple case

解

例えば、B.C.1ではdu/dz=0

式（1.15) ⟵ 2つのB.C.
1つのI.C.

圧密方程式の無次元化



最大排水長が同じならは、
ここだけ見たら、
解u(z,t)は同じ

注:過剰間隙水圧

P.D.E. $$\frac{\partial u}{\partial t}=c_v\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\qquad\left(c_v=\frac{k}{\gamma_w m_v}\right)\qquad(1.15)$$

B.C. $$at\quad z=0,\ \ u(0,t)=0$$
$$at\quad z=H,\ \ \frac{\partial u(H,t)}{\partial z}=0\qquad(1.16)$$

I.C. $$at\quad t=0,\ \ u=\Delta\sigma_{z0}=const.\qquad(1.17)$$

距離z、時間tの無次元化

$$\zeta=\frac{z}{H},\qquad T_v=\frac{c_v t}{H^2}\qquad(1.18)$$
$$0\le\xi\le1$$

時間係数(time factor)

均質(homogeneous)地盤
c_v=const.

$$c_v=\frac{k}{m_v\gamma_w}=\frac{[L/T]}{[L^2/F][F/L^3]}=\frac{[L^2]}{[T]}$$
$$(e.g.\ \ cm^2/\mathrm{min}, m^2/year)$$

(1.18) => (1.15)、(1.16)、(1.17)

P.D.E. $$\frac{\partial u}{\partial T_v}=\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}\qquad(1.19)$$

B.C. $$at\quad \zeta=0,\ \ u(0,T_v)=0$$
$$at\quad z=1,\ \ \frac{\partial u(1,T_v)}{\partial\zeta}=0\qquad(1.20)$$

I.C. $$at\quad T_v=0,\ \ u(\zeta,0)=\Delta\sigma_{z0}=const.\qquad(1.21)$$

無次元数を変数に持つ解$u(\zeta,T_v)$に式(1.18)を代入すれば、実際の地盤深さzの、ある時間tの過剰間隙水圧が求まる。

本日のTechnical terms

フック則:Fooke's law
テルツァーギ:Terzaghi
圧密方程式:equation of consolidation
境界条件:boundary condition
初期条件:initial condition
過剰間隙水圧:excess pore water pressure
圧密係数: coefficient of consolidation
均質:homogeneous
時間係数:time factor

課題(10/14-①)

(1)粘土の要素として圧密速度を決める、特性を二つ挙げ、その影響の仕方について説明せよ。(例、aが大きいと圧密速度は遅くなる)
(2)体積ひずみを従属変数とした場合の圧密方程式において、式(1.16)、式(1.17)に対応する境界条件、初期条件を式で与えよ。
ここで全応力増分$\Delta\sigma_{z0}$は一定と仮定する。